Procédure IMPR_STURM

1 But

Cette commande permet de compter et d'imprimer le nombre de valeurs propres (strictement) comprises dans les intervalles suivants :

- un intervalle de l'axe réel (pour les problèmes généralisés GEPs standards à matrices réelles symétriques),
- un disque du plan complexe (pour tous les autres cas de figure, autres GEPs et tous les problèmes quadratiques QEPs)

Cette procédure est préconisée comme vérification *a priori* du modèle et pour définir des intervalles de recherche contenant un nombre raisonnable de valeurs propres afin d'optimiser les coûts des opérateurs `MODE_ITER_SIMULT`, `MODE_ITER_INV` ou `MACRO_MODE_MECA`.

Typiquement, on conseille de rechercher les modes par paquets de quarante environ au maximum. Au delà, les consommations en temps et en mémoire ne sont plus optimales et la qualité des modes obtenus se dégrade. Il vaut alors mieux utiliser plusieurs bandes fréquentielles de recherche.

L'exécution de cette procédure ne nécessite généralement que deux factorisations LDLT, si les valeurs propres n'appartiennent qu'à l'axe réel (`METHODE='STURM'`). Lorsqu'elles sont disséminées dans le plan complexe, la procédure est beaucoup plus coûteuse (`METHODE='APM'`) car elle requiert, en général, des centaines de factorisations. Dans ce cas de figure, elle est donc plutôt à réserver aux problèmes simplifiés de petites taille (inférieurs à 10000 degrés de liberté).

Notons que cette dernière méthode APM est encore l'objet de recherches actives. Sa robustesse n'est donc pas pour l'instant sans faille. Elle est à utiliser en ayant bien pris soin de lire la documentation associée.

Table des Matières

2 Syntaxe

```
IMPR_STURM
          (  ♦  MATR_A =  A   ,                  /  [matr_asse_depl_r]
                                                 /  [matr_asse_depl_c]
                                                 /  [matr_asse_temp_r]
                                                 /  [matr_asse_pres_r]
                                                 /  [matr_asse_gene_r]
                                                 /  [matr_asse_gene_c]
             ♦  MATR_B =  B   ,                  /  [matr_asse_depl_r]
                                                 /  [matr_asse_temp_r]
                                                 /  [matr_asse_pres_r]
                                                 /  [matr_asse_gene_r]
             ♦  MATR_C =  C   ,                  /  [matr_asse_depl_r]
                                                 /  [matr_asse_temp_r]
                                                 /  [matr_asse_pres_r]
                                                 /  [matr_asse_gene_r]

             ◊  SOLVEUR =_F (voir le document [U4.50.01] )
             ◊  UNITE =      /  nunite               [I]
                             /  8                    [DEFAUT]
             ◊  INFO =       /  1                    [DEFAUT]
                             /  2


             ◊  TYPE_RESU =  /  'DYNAMIQUE',         [DEFAUT]
                             /  'MODE_FLAMB',
                             /  'MODE_COMPLEXE'.

# Si TYPE_RESU='DYNAMIQUE'
             ◊   FREQ_MIN =  /  f_min                [R]
                             /   0.0                 [DEFAUT]
             ♦   FREQ_MAX =     f_max                [R]

# Si TYPE_RESU='MODE_FLAMB'
             ♦  CHAR_CRIT_MIN =  lambda_min          [R]
             ♦  CHAR_CRIT_MAX =  lambda_max          [R]

# Si TYPE_RESU='MODE_COMPLEXE'
             ◊  FREQ_TYPE_CONTOUR   =      'CERCLE'  [DEFAUT]
             ♦  FREQ_RAYON_CONTOUR  =      rayon     [R]
             ◊  FREQ_CENTRE_CONTOUR =  /   centre    [C]
                                       /   0.0+0.0j  [DEFAUT]

     ◊   COMPTAGE=_F(
             ◊  METHODE =          /  'AUTO',        [DEFAUT]
                                   /  'STURM',
                                   /  'APM'.

             ◊  SEUIL_FREQ =       /  f_seuil        [R]
                                   /  0.01           [DEFAUT]
             ◊  PREC_SHIFT =       /  p_shift        [R]
                                   /   0.01          [DEFAUT]
             ◊  NMAX_ITER_SHIFT =  /  n_shift        [I]
                                   /  5              [DEFAUT]
             ◊  NBPOINT_CONTOUR =  /  nb_point       [I]
                                   /  40             [DEFAUT]
```

```
◊   NMAX_ITER_CONTOUR = /   n_contour     [I]
                        /   3             [DEFAUT]
    )

) ;
```

3 Opérandes

3.1 Principes

Cet opérateur `IMPR_STURM` sert à compter le nombre de valeurs propres (strictement) comprises dans:

- un intervalle de l'axe réel (pour les problèmes généralisés GEPs standards à matrices réelles symétriques),
- un disque du plan complexe (pour tous les autres cas de figure, autres GEPs et tous les problèmes quadratiques QEPs)

Ces valeurs sont imprimées dans le fichier d'unité logique précisée par le mot-clé `UNITE`. Cette procédure est préconisée comme vérification *a priori* du modèle et pour définir des intervalles de recherche contenant un nombre raisonnable de valeurs propres afin d'optimiser les coûts des opérateurs `MODE_ITER_SIMULT`, `MODE_ITER_INV` ou `MACRO_MODE_MECA`.

Typiquement, on conseille de rechercher les modes par paquets d'environ quarante au maximum. Au delà, les consommations en temps et en mémoire ne sont plus optimales et la qualité des modes obtenus se dégrade. Il vaut alors mieux utiliser plusieurs bandes fréquentielles de recherche.

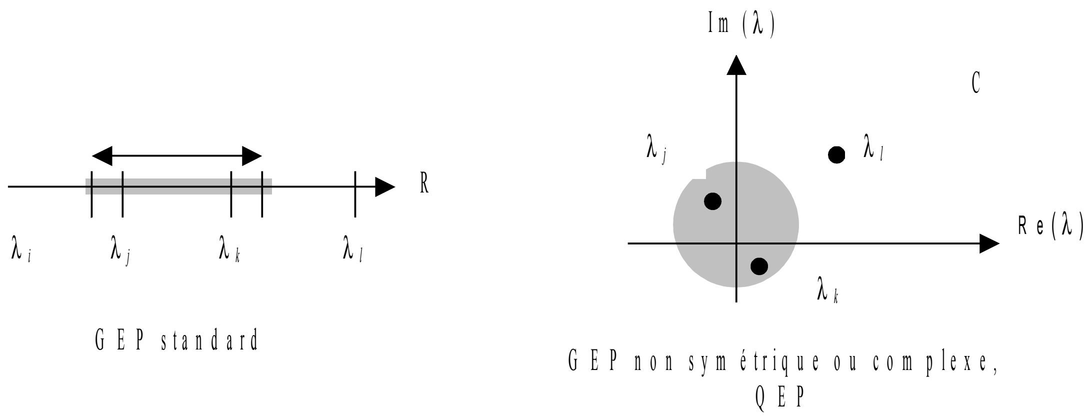

Figure 1ab._ Deux problématiques de dénombrement distinctes: dans un segment de l'axe réel et dans une portion finie du plan complexe (pour l'instant qu'un disque).

Dans le premier cas, lorsqu'on cherche à dénombrer les valeurs propres strictement incluses dans un segment de l'axe réel, on utilise la méthode dite de «Sturm» (cf. [R5.01.01] §3.5/3.6).

L'exécution de cette procédure ne nécessite généralement que deux factorisations LDLT, si les valeurs propres n'appartiennent qu'à l'axe réel (`METHODE='STURM'`). Lorsqu'elles sont disséminées dans le plan complexe, on utilise une méthode dite de l'Argument Principal ('Argument Principal Method' ou APM). Elle est beaucoup plus coûteuse (`METHODE='APM'`) car elle requiert, en général, des centaines de factorisations. Dans ce cas de figure, elle est donc plutôt à réserver aux problèmes simplifiés de petites taille (inférieurs à 10000 degrés de liberté).

Notons que cette dernière méthode APM est encore l'objet de recherches actives. Sa robustesse n'est donc pas, pour l'instant, sans faille. Elle est à utiliser en ayant bien pris soin de lire la documentation associée.

3.2 Caractéristiques du problème modal: opérandes MATR_A/B/C

♦ MATR_A = A
♦ MATR_B = B
◊ MATR_C = C

Ces opérandes permettent de renseigner les matrices (assemblées ou généralisées[1]) caractérisant le problème modal. Ces matrices peuvent être symétriques ou non. Elles sont réelles sauf la matrice $\mathbf{A}$ qui peut être, soit réelle, soit complexe.

La donnée de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ permet de définir le problème modal généralisé (GEP) (cf. [R5.01.01]) étudié

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u}=\lambda\,\mathbf{B}\,\mathbf{u} \quad (\mathrm{GEP})$$

Dans le cas classique de la dynamique (TYPE_RESU='DYNAMIQUE'), $\mathbf{A}$ est la matrice de rigidité (symétrique réelle) et $\mathbf{B}$ et la matrice de masse (symétrique réelle). La valeur propre λ est alors reliée à la fréquence propre f par la formule: $\lambda=(2\pi f)^2$. Elle est réelle positive.

Dans le cas de la théorie du flambement linéaire (TYPE_RESU='MODE_FLAMB'), $\mathbf{A}$ est la matrice de rigidité (symétrique réelle) et $\mathbf{B}$ la matrice de rigidité géométrique (symétrique réelle). La valeur propre λ est appelée charge critique. Elle est réelle.

Lorsqu'une des deux matrices n'est plus symétrique ou comporte des termes complexes (par ex. pour prendre en compte de l'amortissement hystérétique), les valeurs propres sont potentiellement complexes. Pour traiter ce problème il faut initialiser TYPE_RESU à 'MODE_COMPLEXE'.

La donnée de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ permet de définir le problème modal quadratique (QEP) (cf. [R5.01.02]) étudié

$$(\mathbf{A}+\lambda\,\mathbf{C}+\lambda^2\,\mathbf{B})\,\mathbf{u}=\mathbf{0} \quad (\mathrm{QEP})$$

Dans ce cas de figure, les valeurs propres sont potentiellement complexes. Pour traiter ce problème il faut initialiser TYPE_RESU à 'MODE_COMPLEXE'. Souvent $\mathbf{A}$ est la matrice de rigidité, $\mathbf{C}$ une matrice prenant en compte l'amortissement visqueux et/ou des effets gyroscopiques et $\mathbf{B}$ la matrice de rigidité géométrique.

3.3 Opérande TYPE_RESU

```
◊  TYPE_RESU=   /  'DYNAMIQUE'          [DEFAUT]
                /  'MODE_FLAMB'
                /  'MODE_COMPLEXE'
```

Ce mot-clé permet de définir la nature du problème modal à traiter: pré-estimer le spectre de fréquences de vibration (cas classique de 'DYNAMIQUE'), le faire en terme de de charges critiques (cas de la théorie du flambement linéaire 'MODE_FLAMB') ou calibrer celui d'un GEP non standard ou d'un QEP dans une portion du plan complexe ('MODE_COMPLEXE').

A l'issu de ce choix, l'utilisateur doit spécifier les caractéristiques de sa zone de contrôle:

- pour 'DYNAMIQUE' : FREQ_MIN/MAX ,
- pour 'MODE_FLAMB' : CHAR_CRIT_MIN/MAX ,
- pour 'MODE_COMPLEXE' : FREQ_TYPE/RAYON/CENTRE_CONTOUR .

3.4 Opérandes FREQ_MIN et FREQ_MAX

1 Cette notion de matrice généralisée n'a rien à voir avec celle de problème modal généralisé !

◊ FREQ_MIN = f_min
♦ FREQ_MAX = f_max

Ces mot-clé doivent être utilisés si TYPE_RESU='DYNAMIQUE'. Ils définissent les bornes inférieure et supérieure (en Hertz) de la bande de fréquence dans laquelle on cherche le nombre de fréquences propres (cf. figure 1a). Ces deux bornes sont des réels positifs distincts. On recherche alors le nombre de valeurs propres dans la bande $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ avec : $\lambda_{*}=(2\pi f_{*})^2$.

Remarque:

- *Si FREQ_MIN est absent alors on calcule le nombre de fréquences propres comprises entre 0. et f_{max}.*

3.5 Opérandes CHAR_CRIT_MIN et CHAR_CRIT_MAX

♦ CHAR_CRIT_MIN = lambda_min
♦ CHAR_CRIT_MAX = lambda_max

Ces mots-clés doivent être utilisés si TYPE_RESU='MODE_FLAMB'. Ils définissent les bornes inférieure et supérieure de la bande de charges critiques dans laquelle on cherche le nombre de charges critiques propres (cf. figure 1b). Ces deux bornes sont des réels positif ou négatif. On recherche alors le nombre de valeurs propres dans la bande $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$.

3.6 Opérandes FREQ_TYPE/RAYON/CENTRE_CONTOUR

```
◊  FREQ_TYPE_CONTOUR   =       'CERCLE'  [DEFAUT]
♦  FREQ_RAYON_CONTOUR  =       rayon     [R]
◊  FREQ_CENTRE_CONTOUR =  /    centre    [C]
                          /    0.0+0.0j  [DEFAUT]
```

Ces mots-clés doivent être utilisés si TYPE_RESU='MODE_COMPLEXE'. Ils définissent le type de contour à l'intérieur duquel on cherche les valeurs propres. Pour l'instant on ne peut choisir qu'un contour de type ' CERCLE ' (qui délimite donc le disque de contrôle). On mentionne son centre (un nombre complexe) et son rayon (un réel positif) .

Remarques:

- *En toute rigueur, ce rayon doit être supérieur au «zéro modal» (égal à 0.01 par défaut). C'est-à-dire supérieur à la valeur en dessous de laquelle on considère qu'une valeur propre est nulle ou que deux valeurs propres sont confondues [2] si on parle de leur écart.*
- *Contrairement aux valeurs de FREQ_MIN/MAX , les unités ne sont pas ici en fréquence, mais en pulsation si on fait l'analogie avec le problème DYNAMIQUE . Comme pour un TYPE_RESU='MODE_FLAMB' , l'unité des caractéristiques du contour ne subit aucune transformation. Cela permet à la méthode APM de traiter tous les types de problèmes.*

3.7 Mot-clé facteur COMPTAGE

Une fois défini le type de zone de contrôle (segment ou disque), il reste à fixer la méthode de dénombrement et ses paramètres.

```
◊  METHODE = /  'AUTO',        [DEFAUT]
             /  'STURM',
             /  'APM'.
```

2 On dit alors qu'elles sont multiples.

Si on traite un problème de type 'DYNAMIQUE' ou 'MODE_FLAMB', seule la méthode 'STURM' est autorisée. De même pour 'MODE_COMPLEXE' et 'APM'. Si on se trompe de METHODE, une alarme apparaît et l'opérateur choisit automatiquement la méthode la plus appropriée.
De même si on laisse le mode 'AUTO' paramétré par défaut, l'opérateur choisit automatiquement la méthode suivant le type d'étude choisie.

Remarques:

- *On peut utiliser la méthode APM pour dénombrer les modes d'un GEP standard en posant TYPE_RESU='MODE_COMPLEXE '. Cela permet de comparer et valider les deux méthodes de comptage (cf. cas-tests SDLS02a et SDLL123a).*
- *Si les caractéristiques des matrices ne sont en cohérence avec la méthode de comptage choisie, le calcul s'arrête en ERREUR_FATALE .*

```
◊  SEUIL_FREQ =         /   f_seuil       [R]
                        /   0.01          [DEFAUT]
◊  PREC_SHIFT =         /   p_shift       [R]
                        /    0.01         [DEFAUT]
◊  NMAX_ITER_SHIFT =    /   n_shift       [I]
                        /   5             [DEFAUT]
```

Les trois paramètres précédent, SEUIL_FREQ, PREC_SHIFT et NMAX_ITER_SHIFT, ne sont utilisés qu'avec la méthode de STURM. Ils sont liés à l'algorithme de décalage des bornes du segment de contrôle (cf. [R5.01.01] §3.8.3) lorsqu'on s'aperçoit que celles-ci sont très proches d'une valeur propre[3]. Ces bornes f_{min} (ou λ_{min} en flambement) ou f_{max} (resp. λ_{max}) sont alors décalées vers l'extérieur du segment de p_shift% :

- $f^{-}_{min} = f_{min} \times (1 - sign(f_{min})\, p_{shift})$ ($\lambda_{min} = \lambda_{min} \times (1 - sign(\lambda_{min})\, p_{shift})$)
- $f^{+}_{max} = f_{max} \times (1 + sign(f_{max})\, p_{shift})$ ($\lambda_{max} = \lambda_{max} \times (1 + sign(\lambda_{max})\, p_{shift})$)

On recherche alors le nombre de valeurs propres dans le nouvel intervalle $[f^{-}_{min}, f^{+}_{max}]$ (resp. $[\lambda^{-}_{min}, \lambda^{+}_{max}]$). Si une des bornes pose encore problème, on décale à nouveau. On ne s'autorise pas plus de n_shift modifications des bornes de l'intervalle.

Remarque:

- *Une borne de l'intervalle σ est proche d'une valeur propre, lorsque la factorisation LDLT de la matrice dynamique associée à cette borne (par exemple celle d'un GEP s'écrit $\mathbf{Q}(\sigma) := \mathbf{A} - \sigma \mathbf{B}$), conduit à une perte de décimale de plus de NPREC digits (valeur paramétrée sous le mot-clé SOLVEUR).*

La valeur f_seuil permet de paramétrée le «zéro modal» en deçà duquel, on considère qu'une valeur propre est nulle. Si $|f_{min}| \leq f_{seuil}$ et si f_{min} est détectée comme valeur propre, alors on recherche le nombre de fréquences propres dans l'intervalle $[-f_{seuil}, f_{max}]$.
On considère alors que f_{min} est associée à un mode de corps rigide. La modification de la borne inférieure de l'intervalle permet *a priori* de comptabiliser tous les modes de corps rigide.
Dans le cas de la théorie du flambement linéaire, on remplace f par λ et on définit : $\lambda_{seuil} = (2\pi f_{seuil})^2$.

```
◊  NBPOINT_CONTOUR =    /   nb_point      [I]
                        /   40            [DEFAUT]
◊  NMAX_ITER_CONTOUR =  /   n_contour     [I]
                        /   3             [DEFAUT]
```

3

Les deux paramètres précédent, NB_POINT_CONTOUR et NMAX_ITER_CONTOUR, ne sont utilisés qu'avec la méthode APM. Ils sont cruciaux pour sa robustesse et ils dimensionnent son temps calcul (un calcul avec nb_point=80 durera plus longtemps qu'un calcul avec nb_point=40).
La valeur nb_point donne le nombre de point de discrétisation qui sont positionnés le long du contour. Cette discrétisation doit être assez fine pour «capturer» toute l'information spectrale. Idéalement, cette valeur doit être fixée à au moins six fois le nombre de modes que l'on escompte trouver dans la cercle. Si on n'a aucune idée *a priori* de ce nombre, il faut le fixer à une valeur pas trop faible: par exemple, 40 ou 60.

Remarque:

- *Attention, si ce chiffre est trop grand (par exemple 1000), suivant la taille du problème, comme il implique autant de factorisations LDLT, le calcul peut être très long !*

L'algorithme APM implanté ne convergera que lorsque 3 évaluations successives du nombre de valeurs propres fourniront le même résultat. La différences entre ces trois évaluations réside uniquement dans le degré de discrétisation du contour. On commence par discrétiser avec $k_{-}=\mathrm{nb\_point}/2$, puis avec $k=\mathrm{nb\_point}/2$ et enfin avec $k_{+}=2\,\mathrm{nb\_point}$. Si ces trois niveaux de discrétisation du contour produisent une estimation du nombre de valeurs propres identiques, l'algorithme est considéré comme convergé. Son résultat est alors ce nombre entier.
Sinon, on double ces trois niveaux de discrétisations suivant la permutation suivante

$$k_{-}\leftarrow k \quad , \quad k\leftarrow k_{+} \quad \text{et} \quad k_{+}\leftarrow 2\,k_{+}$$

et on réévalue les nombres de valeurs propres avec ces trois niveaux de discrétisation[4]. Si ils sont identiques, la convergence est atteinte, sinon on continue. On réitère cette heuristique dichotomique au maximum n_contour fois.
Si ce processus n'a pas convergé ou si son résultat est incohérent (entier strictement négatif), on s'arrête en ERREUR_FATALE.

3.8 Opérande UNITE

◊ UNITE

Numéro de l’unité logique correspondant au fichier d’écriture. Par défaut, elle vaut 8, c’est-à-dire le fichier RESULTAT.

3.9 Opérande INFO

```
◊ INFO = / 1        [DEFAUT]
         / 2
```

Indique le niveau d'impression dans le fichier MESSAGE.
1: Impression du résultat (et des étapes principales de l'algorithme si APM).
2: Impression plus détaillée plutôt pour développeur.

4 Bien sûr pour économiser du temps calcul, on ne réévalue que pour la nouvelle discrétisation, la plus fine.

4 Exemples

Extrait des fichiers de commande et des fichiers message des cas-tests SLDL02a et SDLL123a.

Comparaison des deux méthodes STURM et APM sur le GEP standard de SLDL02a (pour STURM les bornes sont mentionnées en fréquence). Dans le premier calcul, on chercher à compter le nombre de modes contenu dans la bande fréquentielle $[0;5]$ avec la méthode usuelle: STURM. Dans le second, on fait la même chose avec la méthode AMP, mais dans le disque centré à l'origine (centre=0+0j) et de rayon rayon= $(2\pi.5)^2$ (car il n'y a pas de changement d'unité avec APM). Les deux résultats sont affichés dans le fichier MESSAGE .

```
f1=5.0
IMPR_STURM(MATR_A=MATASSR,MATR_B=MATASSM,TYPE_RESU='DYNAMIQUE',
      FREQ_MAX=f1,COMPTAGE=_F(METHODE='STURM'),UNITE=6,)
w1=(2*pi*f1)**2
IMPR_STURM(MATR_A=MATASSR,MATR_B=MATASSM,TYPE_RESU='MODE_COMPLEXE',
     FREQ_TYPE_CONTOUR='CERCLE',FREQ_CENTRE_CONTOUR=0.0+0.0j,FREQ_RAYON_CONTOUR=w1,
     COMPTAGE=_F(METHODE='APM'),UNITE=6,)
```

En INFO=1, cela provoque les affichages suivant dans le fichier MESSAGE:

```
------------------------------------------------------------------------
   VERIFICATION DU SPECTRE DE FREQUENCES (METHODE DE STURM)
 PAS DE FREQUENCE DANS LA BANDE ( 0.000E+00, 5.000E+00)

….............

(METHODE APM) POUR LES 3 NIVEAUX DE DISCRETISATION SUIVANTS
 ---    20 ---    40 ---    80 ---
 NOMBRE DE VALEURS PROPRES DETECTEES
 ---     0 ---     0 ---     0 ---
(METHODE APM) CONVERGENCE DE L'HEURISTIQUE
------------------------------------------------------------------------
   VERIFICATION DU SPECTRE EN FREQUENCE (METHODE DE L'ARGUMENT PRINCIPAL)
 PAS DE FREQUENCE DANS LE DISQUE CENTRE EN ( 0.000E+00, 0.000E+00)
 ET DE RAYON  9.870E+02
```

Ici, la méthode de Sturm a requis seulement deux factorisations. La méthode APM a convergé immédiatement à la première itération. Mais celle-ci a nécessité $20+40+80=140$ factorisations. Le dénombrement de valeurs propres dans le plan complexe a un prix (que l'on arrive pas pour l'instant à réduire) !

Dénombrement concernant le QEP de SDLL123a. Cette fois, seule la méthode APM s'avère licite. On compte le nombre de modes contenus dans le cercle centré à l'origine ($centre=0+0j$) et de rayon $rayon=248\pi$.

```
f1=248.*pi
IMPR_STURM(MATR_A=RIGIDITE,MATR_B=MASSE,MATR_C=GYOM,TYPE_RESU='MODE_COMPLEXE',
      FREQ_TYPE_CONTOUR='CERCLE',FREQ_CENTRE_CONTOUR=0.0+0.0j,FREQ_RAYON_CONTOUR=f1,
      COMPTAGE=_F(METHODE='APM',),
      UNITE=6,)
```

En INFO=1 cela provoque les affichages suivant dans le fichier MESSAGE:

```
(METHODE APM) POUR LES 3 NIVEAUX DE DISCRETISATION SUIVANTS
 ---    20 ---    40 ---    80 ---
 NOMBRE DE VALEURS PROPRES DETECTEES
 ---     4 ---     4 ---     4 ---
(METHODE APM) CONVERGENCE DE L'HEURISTIQUE
------------------------------------------------------------------------
   VERIFICATION DU SPECTRE EN FREQUENCE (METHODE DE L'ARGUMENT PRINCIPAL)
 LE NOMBRE DE FREQUENCES DANS LE DISQUE CENTRE EN ( 0.000E+00, 0.000E+00)
 ET DE RAYON  7.791E+02 EST     4
------------------------------------------------------------------------
```