Manuel d'Utilisation
Fascicule U4.5- : Méthodes de résolution
Document : U4.55.02

Opérateur RESOUDRE

1 But

Résoudre un système d’équations linéaires par une méthode "directe" ou par la méthode du gradient conjugué préconditionné.

Les méthodes de résolutions implantées dans *Aster* et applicables par cette commande sont :

- la méthode `MULT_FRONT` (méthode directe),
- la méthode `MUMPS` (méthode directe),
- la méthode `GCPC` (méthode itérative),
- la méthode `LDLT` (méthode directe),

Le choix effectif de la méthode se fait au travers de la commande `NUME_DDL` [U4.61.11].

Pour les méthodes directes, la matrice doit avoir été préalablement factorisée par la commande `FACTORISER` [U4.55.01]. Dans le cas de la méthode du gradient conjugué avec préconditionnement, la matrice de préconditionnement est fournie par l’opérateur `FACTORISER` [U4.55.01].

L’opérateur permet des résolutions complexes pour les méthodes "directes".

Produit une structure de données de type `cham_no`.

2 Syntaxe

```
U     [cham_no] =  RESOUDRE

               (  ◊   reuse = U,
                  ♦   MATR  = A,
                  #   Si méthode LDLT, MULT_FRONT, MUMPS :
                                        /   [matr_asse_DEPL_R]
                                            /   [matr_asse_DEPL_C]
                                            /   [matr_asse_TEMP_R]
                                            /   [matr_asse_TEMP_C]
                                            /   [matr_asse_PRES_R]
                                            /   [matr_asse_PRES_C]
                  #   Si méthode GCPC :
                                        /   [matr_asse_DEPL_R]
                                            /   [matr_asse_TEMP_R]
                                            /   [matr_asse_PRES_R]

                  ♦   CHAM_NO =    B,        /   [cham_no]

                  ◊   CHAM_CINE =  vcine  ,  /   [cham_no]


                  #   si méthode MUMPS :
                      ◊   RESI_RELA =  /   1.e-6  ,   [DEFAUT]
                                       /   eps,       [R]

                  #   si méthode GCPC :

                      ♦   MATR_PREC =  precond,  /   [matr_asse_DEPL_R]
                                                 /   [matr_asse_TEMP_R]
                                                 /   [matr_asse_PRES_R]

                      ◊   REPRISE =    /   'OUI'  ,
                                       /   'NON'  ,            [DEFAUT]

                      ◊   RESI_RELA =  /   1.e-6  ,            [DEFAUT]
                                       /   resi   ,            [R]

                      ◊   NMAX_ITER =  /   niter  ,            [I]
                                       /   0      ,            [DEFAUT]


                  ◊   TITRE =   titr   ,         [l_K80]

                  ◊   INFO =    /  1   ,         [DEFAUT]
                                /  2   ,

               )
```

```
Si CHAM_NO :   [cham_no_DEPL_R]   alors (*)   →   DEPL_R
               [cham_no_TEMP_R]               →   TEMP_R
               [cham_no_PRES_R]               →   PRES_R
```

3 Généralités

Cette commande permet de résoudre :

- par une méthode directe, le système linéaire $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$, où $\mathbf{A}$ est une matrice préalablement "factorisée" par la commande FACTORISER [U4.51.01.],
- par la méthode du gradient conjugué préconditionné, le système linéaire $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, où $\mathbf{P}^{-1}$ est une matrice de préconditionnement déterminée par la commande FACTORISER [U4.51.01] et $\mathbf{A}$ la matrice assemblée initiale.

La résolution est possible pour des conditions aux limites de DIRICHLET (conditions aux limites cinématiques) dualisées ou éliminées [U2.01.02]. Dans ce dernier cas, si le chargement $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ sur le "bord" Γ_0 a été traduit par une charge cinématique (opérateur AFFE_CHAR_CINE [U4.44.03] prise en compte dans la matrice assemblée (opérateur ASSE_MATRICE [U4.61.22], la "valeur" de ce chargement$\left(\mathbf{X}_0\right)$, calculée par l'opérateur CALC_CHAR_CINE [U4.61.03] doit être fournie par le mot clé CHAM_CINE.

4 Opérandes

4.1 Opérande MATR

♦ `MATR = A ,`

Nom de la matrice assemblée du système à résoudre.
- Pour les méthodes directes, on fournit à MATR le concept produit par l'opérateur FACTORISER ; cette matrice peut être réelle ou complexe, symétrique ou non.
- Pour la méthode du gradient conjugué, on fournit à MATR la matrice assemblée intiale. La matrice de préconditionnement est à fournir au mot-clé MATR_PREC.

4.2 Opérande CHAM_NO

♦ `CHAM_NO = B ,`

Nom du vecteur second membre (en général obtenu par la commande ASSE_VECTEUR).

4.3 Opérande CHAM_CINE

◊ `CHAM_CINE = vcine ,`

Nom du vecteur représentant la "valeur" des conditions aux limites de type "DIRICHLET" traduites sous forme de chargement cinématique (c'est à dire par utilisation d'une des commandes AFFE_CHAR_CINE ou AFFE_CHAR_CINE_F).

Ce cham_no provient de l'exécution de l'opérateur CALC_CHAR_CINE sur la liste des char_cine (chargements cinématiques) associée à la matrice assemblée A [U2.01.02].

4.4 Opérande RESI_RELA

◊ `RESI_RELA = 1.e-6 (défaut) / eps`

Ce mot clé est spécifique à la méthode MUMPS. Il est décrit dans [U4.50.01]

4.5 Opérande MATR_PREC

◊ `MATR_PREC = precond`

Mot-clé spécifique à la méthode `GCPC`.
Matrice de préconditionnement, obtenue par l'opérateur `FACTORISER` [U4.55.01].
Le préconditionnement est nécessaire pour obtenir une bonne convergence en un minimum d'itérations.

4.6 Opérande `REPRISE`

◊ `REPRISE`

Mot-clé spécifique à la méthode `GCPC`.
Indique si l'on est ou non en reprise d'un calcul précédent qui n'aurait pas convergé suffisamment :

le calcul est initialisé par :

$x^{(0)}=0$ vecteur nul si `REPRISE = 'NON'`

$x^{(0)}=S$ le `cham_no` solution `'S'` si `REPRISE = 'OUI'` ; dans ce cas, il faut indiquer `reuse = S`.

La valeur par défaut est `'NON'`.

4.7 Opérande `RESI_RELA`

◊ `RESI_RELA`

Mot-clé spécifique à la méthode `GCPC`.
Critère de convergence de l'algorithme ; c'est un critère relatif sur le résidu :

$$\frac{\left\|r_m\right\|}{\left\|b\right\|} \leq resi$$

r_m est le résidu à l'itération m

b est le second membre et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

La valeur par défaut est 1.E-6.

4.8 Opérande `NMAX_ITER`

◊ `NMAX_ITER = niter`

Mot-clé spécifique à la méthode `GCPC`.
Nombre d'itérations maximum de l'algorithme.

Si `niter = 0` alors le nombre maximum d'itérations est calculé comme suit :
`niter = nequ/2` où `nequ` est le nombre d'équations du système.

La valeur par défaut est 0.

4.9 Opérande `TITRE`

◊ `TITRE = titr ,`

Titre que l'on veut donner au résultat produit [U4.03.01].

4.10 Opérande `INFO`

◊ `INFO =`

`1` : pas d'impression.
`2` : impressions

5 Algorithme du gradient conjugué par LDL^T

Soient :

A : la matrice du système à inverser,

C : la matrice de préconditionnement, où D = diag (A),

b : le vecteur second membre du système.

5.1 Initialisation

$x^{(o)}$	=	vecteur nul	si `REPRISE = 'NON'`
		`cham_no` produit	si `REPRISE = 'OUI'`

$$r^{(o)} = Ax^{(o)} - b$$

$$\gamma_0 = 0.$$

5.2 Corps de l'algorithme

Pour $m = 0$ à `niter` et tant que $\dfrac{\|r_m\|}{\|b\|} \leq resi$ faire

soit résoudre $C\tilde{r}^{(m)} = r^{(m)}$ où $C = LDL^T$ incomplet,

soit résoudre $D\tilde{r}^{(m)} = r^{(m)}$ où $D = diag(A)$

$$\gamma_m = \left(r^{(m)}, \tilde{r}^{(m)}\right)$$

si $m = 0$ $\quad p^{(0)} = \tilde{r}^{(0)}$

si $m > 0$ $\quad p^{(m)} = \tilde{r}^{(m)} + \dfrac{\gamma_m}{\gamma_{m-1}} p^{(m-1)}$

$$\rho^{(m)} = \frac{\left(r^{(m)},\ p^{(m)}\right)}{\left(p^{(m)}\ ,\ A.p^{(m)}\right)}$$

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \rho^{(m)}\ p^{(m)} \quad \text{itéré} \quad m+1$$

$$r^{(m+1)} = r^{(m)} - \rho^{(m)}\ Ap^{(m)} \quad \text{résidu} \quad m+1$$

Fin pour m

6 Exemples

6.1 Résolution par la méthode directe MULT_FRONT

- Constitution des matrices assemblées :

  On a calculé auparavant les termes élémentaires KEL , FEL.

```
NU =NUME_DDL(MATR_RIGI=KEL, METHODE='MULT_FRONT' )
K  =ASSE_MATRICE(MATR_ELEM=KEL,  NUME_DDL=NU, )
F  =ASSE_VECTEUR(MATR_ELEM=FEL,  NUME_DDL=NU, )
```

- Factorisation :

```
K  =FACTORISER(reuse=K,   MATR_ASSE=K,)
```

- Résolution :

```
U  =RESOUDRE(MATR=K,    CHAM_NO=F,)
```

- pour l'utilisation des charges cinématiques (avec élimination des degrés de liberté imposés), voir l'exemple donné dans la commande AFFE_CHAR_CINE [U4.44.03].

6.2 Résolution par la méthode du gradient conjugué préconditionné

```
NU     =  NUME_DDL( MATR_RIGI= KEL, METHODE= 'GCPC' , RENUM= 'SANS',)

K   =  ASSE_MATRICE (   MATR_ELEM= KEL, NUME_DDL= NU )
F   =  ASSE_VECTEUR (   VECT_ELEM= FEL, NUME_DDL= NU )
KPREC  =  FACTORISER    (   MATR_ASSE= K )
dep    =  RESOUDRE      (   CHAM_NO  = F ,   MATR= K,
                            MATR_PREC= KPREC,
                            NMAX_ITER= 1000  ,   RESI_RELA= 1e-07
                        )
```